تمارين للسنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
شعبة العلوم الرياضية

خلال هذه السنة الدراسية، دخلت المقررات الجديدة للسنة الثانية من سلك البكالوريا حيز التنفيذ . مواكبة لهذه المستجدات، تقترح المنسقية المركزية التخصصية في مادة الرياضيات مجموعة من التمارين، مساهمة منها مساعدة الأساتذة في عملهم اليومي.
يمكن استغلال هذه التمارين كليا أو جزئيا في بناء فروض محروسة أو منزلية أو في تهييء الامتحانات التجريبية.
إن هذه التمارين لا تعكس جميع الإمكانيات التي تتيحها المقررات الجديدة و بالتالي فهي لا تشكل لائحة مغلقة لهذه الإمكانيات: ينبغي اعتبار هذه التمارين كأمثلة و ليس كنماذج.
ينبغي كذلك الإشارة إلى أن هذه التمارين لم تخضع إلى المسطرة التي تتبع في اختيار مواضيع البكالوريا : التجريب ، المصادقة عليها من طرف لجنة مختصة ...هكذا يمكن ملاحظة أن طول بعض التمارين لا يتناسب مع المدة الزمنية المخصصة لفرض محروس أو لامتحان تجريبي.

تمرين 1 (الثانية علوم تجريبية)

I.
1. حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$.
2. نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.
   a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .
   b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث : $P(z)=(z-2i)(az^2+bz+c)$.
   c. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II.
في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=4+i$; $z_B=4-i$; $z_C=-i$
1. مثل النقط A و B و C .
2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة S.
3. بين أن النقط B و A و S و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ) ينبغي تحديد مركزها و شعاعها . أرسم (Γ).

تمرين 2 (الثانية علوم تجريبية)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $z_A=i$; $z_B=2$

I.
1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.
2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.
3) مثل النقط A و B و B' .

II.
نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.
1) حدد A' وB' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أنه $\frac{z' - z}{i - z} = -i$ لكل z مخالف للعدد i .

ب ـ بين أن : $\begin{cases} MM' = MA \\ \left(\overline{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ لكل نقطة M مخالفة للنقط A .

ج ـ استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M حيث $M \neq A$.

3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z-2| = \sqrt{2}$.

4) أ ـ بين أن : $z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$ لكل عدد عقدي z .

ب ـ استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

تمرين 3 (الثانية علوم تجريبية)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر النقط I ; A ; B التي ألحاقها على التوالي هي 1 ; $1-2i$; $-2+2i$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

1) أنشئ النقط I ; A ; B.

2) حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) . احسب شعاع الدائرة (C) .

3) لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C) .

3) لتكن E ، النقطة ذات اللحق z_E ، التي تنتمي للدائرة (C) و التي تحقق $\left(\overline{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

4) أ ـ حدد معيار و عمدة العدد $z_E + \frac{1}{2}$.

ب ـ استنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} i$.

تمرين 4 (الثانية علوم تجريبية)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O ; \vec{u} , \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E اللتي ألحقاها على التوالي هي : $z_A = 1-i$ و $z_B = 3+i$ و $z_C = -3$ و $z_D = 2$ و $z_E = -4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z' = (1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أن $OMEM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان $z^2 - 3z + 3 = 0$.

ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3) أ ـ عبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$.

ب ـ استنتج أن $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم عبر $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و شعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها.

تمرين 5 (الثانية علوم تجريبية)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+z+1=0$
2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (F): $z^2=\bar{z}$
   أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z=0$ أو $|z|=1$.
   ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة : $z^3=1$ أو $z=0$.
3) حل المعادلة (F) في $\mathbb{C}$.
4)

تمرين 6 (الثانية علوم تجريبية)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط :

- النقطة A ذات اللحق $a=7-i\sqrt{3}$.
- النقطة B ذات اللحق $b=5+3i\sqrt{3}$.
- النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

1) أ ـ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد الكتابة العقدية للدوران R.
   ب ـ بين أن $R(A)=B$ ثم استنتج طبيعة أن المثلث OAB.
2) حدد q لحق النقطة Q .
3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .
4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟
5) لتكن C النقطة ذات اللحق $c=\frac{2a}{3}$ ؟
   أ ـ أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.
   ب ـ ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

تمرين 7 (الثانية علوم تجريبية)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين :
   أ ـ $z^4=1$ (يمكن ملاحظة أن $z^4-1=\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)$)
   ب ـ $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4=1$
2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و ليكن A عددا عقديا .
   نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=A$. (E)
   P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و $-i$ و z على التوالي .
   أ ـ بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\sqrt[n]{|A|}=\frac{MP}{MQ}$.
   ب ـ بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن $|A|=1$.
   ج ـ استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع حلولها حقيقية .

تمرين 8 (الثانية علوم تجريبية)

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على التوالي هما : $z_A=1$; $z_B=-2$.

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعرف ب : $Z=\dfrac{z-1}{z+2}$.

1) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل من الحالتين التاليتين :

أ ـ $|Z|=1$ ب ـ $Z\in\mathbb{R}$

2) أ ـ بين أنه لكل z مخاف ل -2 لدينا : $(Z-1)(z+2)=-3$

ب ـ نعتبر النقطة M ذات اللحق z و النقطة M' التي لحقها Z .

بين أن : $M'\neq A$ ثم حدد $AM'\times BM$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AM'})}+\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BM})}$.

ج ـ علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

3) أ ـ حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $Z\in i\mathbb{R}$.

ب ـ لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d=\dfrac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي D النقطة ذات اللحق d .

حدد الشكل الجبري للعدد $\dfrac{d-1}{d+2}$ ثم استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج ـ ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi,\pi[$. نضع $f=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}e^{i\theta}$ و نسمي F النقطة ذات اللحق f .

* بين أن العدد $U=\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $\dfrac{f-1}{f+2}=U$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟

تمرين 9 (الثانية علوم تجريبية)

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلتين التفاضليتين : $(E)\quad y''+y'-2y=0$ و

$(F)\quad y''+y'-2y=-8x^2+8x+8$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) .

2) أ ـ حدد الأعداد الحقيقية a و b و c لكي تكون الدالة $g:x\to ax^2+bx+c$ حلا للمعادلة (F).

ب ـ بين أن الدالة f تكون حلا للمعادلة (F) إذا و فقط إذا كانت الدالة $f-g$ حلا للمعادلة (E).

ج ـ استنتج حلول المعادلة (F).

تمرين 10 (الثانية علوم تجريبية)

A _ 1) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

أ ـ ضع جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$.

ب ـ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ ـ بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$.

ب ـ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

ج ـ بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=e^{-x}g(e^x)$.

د ـ أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

3) أنشئ المنحنى (C) .

4) أ ـ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب ـ حدد تغيرات التقابل العكسي f^{-1} على المجال J .

ج ـ أرسم التمثيل المبياني لمنحنى الدالة f^{-1} في المعلم $\left(\boldsymbol{O}\ ;\ \vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\right)$ مستعملا لونا مخالفا .

$B-$ 1) أ ـ بين أن : $f'(x)+f(x)=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.

ب ـ حدد الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\mathbb{R}$ التي تنعدم في 0 .

2) حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقمين اللذين معادلتاهما هما على التوالي $x=0$ و $x=\ln 2$.

تمرين 11 (الثانية علوم تجريبية)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)\ =\ x-\dfrac{1}{1+e^x}$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ \right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بين أن $f^{/}(x)>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3) أ ـ بين أن المستقيمين المعرفين ب $(\Delta_1): y=x$ و $(\Delta_2): y=x-1$ مقاربان مائلان للمنحنى (C) .

ب ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و للمقاربين (Δ_1) و (Δ_2) .

4) أ ـ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

ب ـ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ان $0<\alpha<0{,}5$.

ج ـ تحقق أن $e^{\alpha}+1=\dfrac{1}{\alpha}$.

5) أ ـ بين أن $I\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تماثل (C) .

ب ـ أعط معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0 .

6) أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) و (C) . (سوف نعتبر $\alpha\approx 0{,}45$)

7) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\displaystyle\int_{\alpha}^{n}\big(x-f(x)\big)dx$.

أ ـ ما هو التأويل الهندسي ل u_n .

ب ـ تحقق أن : $x-f(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

ج ـ أحسب u_n بدلالة n .

د ـ بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-(\alpha+\ln\alpha)$.

تمرين 12 (الثانية علوم تجريبية)

I ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)\ =\ \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجتين المحصل عنهما .

2) أ ـ بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C) .

4) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0 .

5) أ ـ بين أن $\forall t\in\mathbb{R}\ ;\ f'(t)\le\dfrac{1}{2}$.

ب ـ نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)-f(x)$.

بين أن φ تزايدية على $\mathbb{R}$. استنتج أن : $f(x)\le\dfrac{1}{2}(x+1)\quad;\quad\forall x\in\mathbb{R}^+$.

ج ـ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) .

6) أنشئ $(T)\ ;\ (C)$ في المعلم $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,\right)$.

7) أ ـ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال I ينبغي تحديده .

ب ـ أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال I .

ج ـ استنتج التمثيل المبياني للدالة g المعرفة على المجال I ب : $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

II ـ نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $I_n=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}\,dt$.

1) بين أن $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية تناقصية و موجبة .

2) استنتج أن $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

3) بين أن $I_n\le\dfrac{1}{2n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

4) استنتج نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

تمرين 13 (الثانية علوم تجريبية)

I ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,\right)$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أ ـ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

ب ـ بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2) أ ـ بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$.

ب ـ استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج ـ حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ ـ بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج ـ ادرس تقعر المنحنى (C) .

د ـ بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$.

5) أ ـ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب ـ أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

II ـ 1) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad f(x) \leq x \Leftrightarrow x \geq -x_0$.

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

أ ـ بين بالترجح أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 0 \leq u_n \leq -x_0$.

ب ـ بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ج ـ استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين 14 (الثانية علوم تجريبية)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها .

2) بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$.

3) بين أن f دالة فردية ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0 .

5) أ ـ بين أن $\forall t \in \mathbb{R} \; ; \; f'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.

ب ـ نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x+1) - f(x)$.

بين أن φ تزايدية على $\mathbb{R}$. استنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad f(x) \leq \dfrac{1}{2}(x+1)$.

ج ـ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) .

6) أنشئ (T) ; (C) و المقاربات في المعلم $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$.

7) أ ـ بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال I ينبغي تحديده .

ب ـ أنشئ منحنى f^{-1} في المعلم $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$ باستعمال لون مغاير .

ج ـ أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال I .

8) نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $u(x) = x - f(x)$.

أ ـ بين أن الدالة u تزايدية على المجال $\left[0,+\infty\right[$.

ب ـ أحسب $u(0)$ ثم استنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad ; \; x \geq f(x)$.

ج ـ بين أن : $f\left(\left[0,1\right]\right)\subset\left[0,1\right]$.

9) نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}-1}{e^{u_n}+1} \end{cases}$

أ ـ بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \le u_n \le 1$.

ب ـ بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ تناقصية . استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة ثم حدد نهايتها .

تمرين 15 (الثانية علوم تجريبية)

I ـ نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} g(x)$

2. أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

3. أحسب $g(0)$ ثم استنتج أن :

$g(x)\ge 0$ لكل x من المجال $[0,+\infty[$

و $g(x)\le 0$ لكل x من المجال $]-1,0]$.

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x\ln(x+1)$.

ليكن $(\mathcal{C})$ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x)$ ثم أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$.

2. بين أن $\left(\forall x\in\ ]-1,+\infty[\right) \quad f'(x)=g(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.

III ـ ليكن n عددا صحيحا طبيعيا حيث : $n\ge 2$ و ليكن h قصور الدالة f على $\mathbb{R}^+$.

نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهول x المعرفة بما يلي : $h(x)=\dfrac{1}{n}$.

1. بين أن h تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال ينبغي تحديده .

2. أ ـ بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n وأن $0<\alpha_n<1$. ($0{,}69<\ln 2<0{,}7$)

ب ـ قارن $h(\alpha_n)$ و $h(\alpha_{n+1})$ ثم بين أن $(\alpha_n)_{n\ge2}$ متتالية تناقصية .

ج ـ استنتج أن $(\alpha_n)_{n\ge2}$ متقاربة .

3. نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على المجال $[0,1]$ بما يلي :

$u(x)=x-\ln(x+1)$; $v(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{2}$.

أ ـ بين أن الدالتين u و v تزايديتين على المجال $[0,1]$.

ب ـ أحسب $u(0)$ و $v(0)$ ثم استنتج أن : $\ln(x+1)\le x$ و $\dfrac{x}{2}\le\ln(x+1)$ لكل x من المجال $[0,1]$

ج ـ بين أن : $\dfrac{x^2}{2}\le f(x)\le x^2 \quad (\forall x\in[0,1])$.

4. أ ـ باستعمال العلاقة السابقة بين أن $\sqrt{\frac{1}{n}} \le \alpha_n \le \sqrt{\frac{2}{n}}$ لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر أو يساوي 2 .

ب ـ استنتج $\lim\limits_{n\to +\infty} \alpha_n$.

تمرين 16 (الثانية علوم تجريبية)

I ـ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$.

1) أحسب $g'(x)$ ثم استنتج أن الدالة g تزايدية على $\mathbb{R}_+^*$.

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج أن : $g(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ (يمكن وضع $t = \sqrt{x}$)

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

3) أ ـ بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل ل(C) بجوار $+\infty$.

ب ـ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (Δ) .

4) أ ـ بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة f .

5) أنشئ المنحنى (C) .

6) أ ـ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_{e^{-2}}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = -4$.

ب ـ أحسب مساحة الحيز المستوي الحصور بين المنحنيين (C) و (Δ) و المستقيمان $x = e^{-2}$ و $x = 1$

III ـ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; u_n \ge 1$.

2. بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \ ; u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ ثم حدد منحى تغيرات المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$.

3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متقاربة ثم حدد نهايتها .

IV ـ لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - e^x + 1$.

1) بين أن : $h(x) = f(e^x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

استنتج جدول تغيرات الدالة h .

تمرين 17 (الثانية علوم تجريبية)

I ـ نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln x$.

1) أ ـ ادرس تغيرات الدالة g (النهايات و الاشتقاق)
ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة g .
2) أ ـ احسب $g(1)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

ب ـ استنتج أن :
$$\forall x \in]1,+\infty[\quad ; g\left(\frac{1}{x}\right)<0$$
$$\forall x \in]0,1[\quad ; g\left(\frac{1}{x}\right)>0$$

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x & ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) بين أن f دالة متصلة في النقطة 0 على اليمين .
2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين . ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟
3) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
ب ـ ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.
4) أ ـ بين أن $f'(x)=x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$ $\left(\forall x\in\ ]0\ ,+\infty\ [\right)$
ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة f .
5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $1<\alpha<2$.
6) أ ـ تحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفصول 0 هي $y=x$.
ب ـ بين ان $\forall x\in\mathbb{R}^+\ ;\ f(x)>x \Leftrightarrow x\in\ ]0,1[$
ج ـ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) .
7) أنشئ المنحنى (C) .

III ـ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ (\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1} = u_n - u_n^2\ln u_n \end{cases}$

1) بين بالترجع أن : $(\forall n \in IN)\ 0 < u_n < 1$.
2) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها .

تمرين 18 (الثانية علوم تجريبية)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.
1) احسب $g'(x)$ لكل x من IR ثم استنتج منحى تغيرات الدالة g .
2) بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من IR (لاحظ أن $g(0)=0$).
3) بين أن : $g(-x)=e^{-x}\left(1+(x-1)e^x\right)$ لكل x من IR ثم استنتج أن $1+(x-1)e^x\geq 0$ $\forall \in IR$.
II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=g(u_n)$ لكل n من IN .
1) بين بالترجع أن $0\leq u_n\leq 1$ لكل n من IN .
2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

3) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها .

III) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{x}{e^x-x-1}$

و (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1\,cm$).

1) بين أن حيز تعريف الدالة f هو $D=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (لا حظ أن : $\forall x\in D\ \ f(x)=x-1-\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}-1}$).

ب- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$ (لا حظ أن : $\forall x\in D\ \ f(x)=x-1-\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}-1}$).

3) أ- بين أن : $\forall x\in D\quad f'(x)=1+\dfrac{1+(x-1)e^x}{\left(e^x-x-1\right)^2}$.

ب- بين أن $f'(x)>0$ لكل x من $I\!R^*$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f .

4) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ ثم استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب-- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+1\right)=0$ ثم استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

5) أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,2[$ بحث $f(\alpha)=0$.

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]-2,-1[$ بحيث $f(\beta)=0$.

ج- استنتج أن $e^{\beta}-\beta-1=\dfrac{\beta}{\beta-1}$.

6) أنشئ (D) و(Δ) و(C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\alpha\simeq1,65$ و $\beta\simeq-1,29$).

7) أ- بين أن: $\displaystyle\int_{-1}^{\beta}\left(1+\frac{x}{e^x-x-1}\right)dx=1+\ln\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)$ (لاحظ أن: $\dfrac{e^x-1}{e^x-x-1}=1+\dfrac{x}{e^x-x-1}$)

ب- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي : $x=-1$ و $x=\beta$ و $y=x$.

تمرين 19 (الثانية علوم تجريبية)

I ـ نعتبر الدالة $\boldsymbol{f}$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=3-\dfrac{9}{4\boldsymbol{x}}$

1) ضع جدول تغيرات الدالة $\boldsymbol{f}$.

2) نضع $\boldsymbol{I}=\left]\dfrac{3}{2},3\right]$. أ ـ بين أن : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{I})\subset\boldsymbol{I}$.

ب ـ بين أن : $(\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{I})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})<\boldsymbol{x}$.

II ـ لتكن $(\boldsymbol{u}_n)$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases}\boldsymbol{u}_0=3\\(\forall\boldsymbol{n}\in\mathbb{N})\quad\boldsymbol{u}_{n+1}=3-\dfrac{9}{4\boldsymbol{u}_n}\end{cases}$

1) في الورقة الملحقة تم رسم التمثيل المبياني للدالة f و المستقيم ذي المعادلة $y = x$. مثل على محور الأفاصيل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).

2) بين بالترجع أن : $\frac{3}{2} < u_n \leq 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

4) نضع $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ ـ بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددا أساسها و حدها الأول .

ب ـ أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

ج ـ أحسب من جديد $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين 20 (الثانية علوم تجريبية)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1} \end{cases}$$

1. بين بالترجع أن : $1 < u_n < 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
2.
   i. بين أن : $u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{u_n - 1}\left(1 - \sqrt[3]{u_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{u_n - 1}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
   ii. استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .
   iii. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها .
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \ln(u_n - 1)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   i. تحقق أن $v_0 = -\frac{1}{3}$ ثم بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها $\frac{1}{3}$.
   ii. استنتج أن : $\ln(u_n - 1) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   iii. احسب u_n بدلالة n .

تمرين 21 (الثانية علوم تجريبية)

في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(-1,m,0)$ حيث m عدد حقيقي.

1) أ- حدد بدلالة m إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

ب- استنتج أن النقط O و A و B غير مستقيمية

تحقق من أن $mx + y - mz = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB).

2) نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 1 = 0$

أ- حدد Ω مركز الفلكة (S) وشعاعها r.

ب-تحقق من أن النقطة O توجد داخل الفلكة (S)

ج- استنتج أن المستوى (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C)

ذ- حدد قيمة m التي من أجلها تكون O هي مركز الدائرة (C)

تمرين 22 (الثانية علوم تجريبية)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O \; ; \; \vec{i} \; , \; \vec{j} \; , \vec{k} \right)$ نعتبر

المجموعة : $\left(S \right) = \left\{ M\left(x, y, z \right) \; ; x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0 \right\}$ و المستوى المعرف ب :

$\left(P \right) : \quad 2x - 2y + z - 2 = 0$

1) بين أن $\left(S \right)$ فلكة ، مركزها $\Omega\left(0,2,0 \right)$ و شعاعها 3 .

2) حدد الوضع النسبي للمستوى $\left(P \right)$ و الفلكة $\left(S \right)$. حدد تقاطع $\left(P \right)$ و $\left(S \right)$.

3) نعتبر المستوى $\left(P_m \right)$ المعرف ب : $\left(P_m \right) \; : 2mx + \left(1 - 2m \right) y + mz + 1 - 2m = 0$

حيث $m \in \mathbb{R}$.

أ ـ ليكن $\left(\Delta \right)$ المستقيم ذو التمثيل البراميتري : $t \in \mathbb{R} \qquad \left(\Delta \right) \; : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -2t \end{cases}$.

بين أن المستقيم $\left(\Delta \right)$ ضمن المستوى $\left(P_m \right)$.

ب ـ حدد m لكي يكون المستوى $\left(P_m \right)$ مماسا للفلكة $\left(S \right)$.

تمرين 23 (الثانية علوم رياضية)

(ليكن n من $\mathbf{N}$)

1- بين أنه يوجد عنصر وحيد x_n من المجال $\left]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[$ بحيث : $\tan x_n = x_n$

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi - x_n \quad (\forall n \geq 0)$

أ)بين أن : $(\forall n \geq 0) \; x_n = (n+1)\pi + Arctan(x_n)$

ب) استنتج أن : $(\forall n \geq 0) \; u_n = Arctan(\frac{1}{x_n})$

ت) بين أن : $\lim_{+\infty} x_n = +\infty$

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها .

تمرين 24 (الثانية علوم رياضية)

A - 1 – نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $\left[0, +\infty\right[$ بما يلي : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

أ) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $\left[0, +\infty\right[$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]0, +\infty\right[$

2 – نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

أ) بين أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

ب) بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ج) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $f'(x) = e^{-x}(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x))$

د) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

3 – ارسم المنحنى الممثل للدالة f في م. م. م (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

4 –أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجالJ يتم تحديده

ب) حدد تغيرات التقابل العكسي f^{-1} على المجال J

ج) ارسم في نفس المعلم المنحنى (C') الممثل للدالة f^{-1}

B - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \geq 0)$

1 –إ) بين أنه إذا كان x من المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ فإن $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$

ب) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α و أن : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{5}$

2 –أ) ادرس إشارة : $f(x) - x$

3- لكل عدد صحيح طبيعي n نضع : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$

أ) بين أن المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متحاديتين (لاحظ أن $u_0 \leq \alpha$)

ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

C - 1 –أ) بين أن : $f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

ب) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\mathbb{R}$ التي تنعدم في 0

2 –أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد x_n من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $f(x_n) = \frac{1}{n}$

ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 2}$ تزايدية

ج) بين أن $(x_n)_{n\geq 2}$ غير مكبورة ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

3 – نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بما يلي : $v_n = \int_0^{x_n} f(x)dx$

أ) بين أن $(v_n)_{n\geq 2}$ تزايدية و أن : $(\forall n \geq 2); 0 \leq v_n \leq 2\ln(2)$

ب) بين أن $(v_n)_{n\geq 2}$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2\ln(2)$

تمرين 25 (الثانية علوم رياضية)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$

1) ادرس تغيرات الدالة **f** المعرفة بما يلي : $f : x \mapsto \frac{e^x}{x+2}$

2) أ- بين أن : $f\left([0,1]\right) \subset [0,1]$

ب- بين أن : $\forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$

ج- استنتج أن المعادلة : $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال [0,1]

3) أ-بين أن : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in [0, 1]$

ب-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

ج_ بين أن : $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

د- بين أن : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \alpha| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

ه- حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية **n** التي يكون من أجلها $\mathbf{u_n}$ قيمة مقربة للعدد α إلى 10^{-3}.

تمرين 26 (الثانية علوم رياضية)

لتكنE مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 و التي تكتب على الشكل $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ حيث $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

1 –أ) بين أنE مزودة بعمليتي جمع مصفوفتين(+) و جداء عدد حقيقي في مصفوفة هو فضاء متجهي حقيقي جزئي

ب)حدد أساسا للفضاء المتجهي E

2 –أ) بين أن E مستقر بالنسبة لعملية جداء مصفوفتين(x)

ب) استنتج أن (E,+,x) حلقة واحدية

ج) هل(E,+,x) تبادلي ؟

3 – ليكنG جزء منE بحيث $a \succ 0$ و$b \succ 0$. بين أن (G,x) زمرة جزئية.

تمرين 27 (الثانية علوم رياضية)

I - ليكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 ، نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

-1 تحقق أن لكل زوج (a,b) من E^2 : $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$

-2 بين أن $(E,\perp)$ زمرة جزئية تبادلية .

II/ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي . لتكن

$\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل: $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$ حيث :

$a \in E$

نضع : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

-1 أ) تحقق أن : $A^2 = -2A$ وأن : $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$

ب) بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

-2 نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned} \varphi : (E,\perp) &\to (\mathcal{F},\times) \\ a &\to \varphi(a) = M(a) \end{aligned}$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي .

ب) استنتج بنية $(\mathcal{F},\times)$.

تمرين 28 (الثانية علوم رياضية)

-1 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 195x - 232y = 1$

أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232

ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(163+232k;137+195k)/k\in\mathbb{Z}\}$

ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0\le d\le 232$ و $195d\equiv 1\ [232]$

2- بين أن 233 عدد أولي

3- لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و232

نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233 .

أ)بين أن : $a^{232}\equiv 1\ [233]$ $(\forall a\in A\setminus\{0\})$

ب) بين أنه لكل عنصرين a و b من المجموعة A , إذا كان f(a)=f(b) فإن a=b

ج) ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث : f(a)=b , حدد a بدلالة b .

د) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

تمرين 29 (الثانية علوم رياضية)

نضع {E={0,1,2,......,25 . ليكن a و b عنصرين من E .

نعتبر التطبيق φ من E نحو E المعرف بما يلي : لكل n من E $\varphi(n)=an+b$

1 –نفترض أن : $\varphi(5)=10$ و$\varphi(19)=14$

أ) بين أن : $14a\equiv 4[26]$

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : 14x-26y=1

ج) استنتج قيمة الزوج (a,b) .

2 –نفترض أن : a=15 و b=3 .

أ) بين أنه إذا كان : $\varphi(n)=\varphi(p)$ فإن n=p .

ب) ليكن n و m عنصرين من المجموعة E بحيث : $\varphi(n)=m$. احسب n بدلالة m

ج) استنتج أن التطبيق φ تقابلا من E نحو E ثم اعط صيغة التقابل العكسي φ^{-1} .

تمرين 30 (الثانية علوم رياضية)

- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(t)=\ln(1+t)+\dfrac{t^2}{1+t^2}$

1) أ) بين أن الدالة f تزايدية قطعا .

ب)حدد نهاية الخارج $\dfrac{f(t)}{t}$ عندما تؤول t الى $+\infty$. ارسم المنحنى الممثل للدالة f .

2) ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم . نعتبر المعادلة : $(E_n):f(t)=\dfrac{1}{n}$

أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا a_n .

ب)بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال $[0,+\infty[$. اعط جدول تغيرات الدالة العكسية f^{-1}

ج) استنتج تغيرات المتتالية $(a_n)_{n\ge 1}$ ثم حدد نهايتها .

3)أ)حدد نهاية الخارج $\dfrac{f(t)}{t}$ عندما تؤول t الى 0.

ب)استنتج نهاية المتتالية $(na_n)_{n\ge 1}$.

<u>تمرين :</u>

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر الدالة h_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h_n(x)=\dfrac{xe^{-x}}{x^n}-x^n$ و الدالة φ_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $\varphi_n(x)=e^{-x}-x^{2n-1}$

1- أ)تحقق أن : $(\forall n\ge 1)(\forall x\succ 0):h_n(x)=0\Leftrightarrow\varphi_n(x)=0$

ب) استنتج أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n , المعادلة $h_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n بحيث : $0<u_n<1$

2- أ)بين أن : $(\forall n\geq 1):\ln(u_n)=-\frac{u_n}{2n-1}$

ب) استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$

تمرين 31 (الثانية علوم رياضية)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,1[$ بما يلي : $f(x)=2xe^x$

1-أ) بين أن f تقابل من $[0,1[$ نحو مجال J يتم تحديده .

ب) لتكن f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .اعط جدول تغيرات f^{-1} .

2-بين أنه يوجد في المجال $[0,1[$ عدد وحيد α يحقق : $\alpha e^{\alpha}=1$ و أن : $\alpha\neq 0$

3-نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\alpha$ و $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)\ \ (\forall n\geq 0)$

أ) بين أن : $(\forall n\geq 0)\ \ u_n\in]0,1[$

ب)بين أن : $(\forall x\in[0,1[)\ \ f(x)\geq x$

ج)استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا.

د) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و أن نهايتها هي 0 .

4-لكل عدد صحيح طبيعي n نضع : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} u_k$

أ) بين أن : $(\forall n\geq 0)\ \ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$

ب)استنتج أن : $(\forall n\geq 0)\ \ u_n=\frac{e^{-S_n}}{2^n}$

ج)بين أن : $(\forall n\geq 0)\ \ u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د)استنتج أن المتتالية $(S_n)_n$ متقاربة و أن نهايتها L تحقق : $\alpha\leq L\leq 2$

تمرين 32 (الثانية علوم رياضية)

<u>تمرين 11</u> : نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{t}e^{-t^2}dt\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=\ln(2)\end{cases}$

1-بين أن الدالة f زوجية .

2-أ)بين أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن : $f'(x)=\frac{e^{-4x^2}}{x}(1-e^{3x^2})$

ب)استنتج منحى تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

3-أ)بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ e^x\geq x+1$

ب)استنتج أن : $(\forall t>0)\ \frac{1}{t}-t \le \frac{1}{t}e^{-t^2} \le \frac{1}{t}$

ج)بين أن : $(\forall x>0)\ \ln 2-\frac{3}{x^2} \le f(x) \le \ln 2$

د)بين أن f متصلة و قابلة للاشتقاق في .

4-أ)بين أن : $(\forall t \ge 1)\ e^{-t^2} \le e^{-t}$

ب) استنتج أن : $(\forall x \ge 1)\ 0 \le f(x) \le \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

ج)حدد نهاية الدالة f عند $+\infty$.

5- أ) أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) ارسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

تمرين 33 (الثانية علوم رياضية)

نعتبر المجموعة التالية : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ مزودة بعملية $(+)$ جمع مصفوفتين و عملية $(.)$ جداء عدد حقيقي في مصفوفة و عملية $(\times)$ جداء مصفوفتين.

1)أ)بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي حقيقي.

ب)حدد أساسا له ثم حدد بعده .

2)ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$. بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,.)$

3) نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ نحو $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ المعرف بما يلي :

$$(\forall z=a+b\alpha\in\mathbb{C}^*)\quad \varphi(z)=M(a,b)$$

أ)حدد قيم α التي يكون من أجلها التطبيق φ تشاكلا من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

ب)بين أن φ تقابل

4) نأخذ : $\alpha=-1+i$

أ)بين أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية .

ب)بين أن $(E^*,+,\times)$ جسم تبادلي .

ب)حدد مقلوب العنصر $M(a,b)$.

تمرين 34 (الثانية علوم رياضية)

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي من1 .

A- لتكن الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g_n(x)=1+x-e^{-nx}$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة g_n .

ب) احسب $\lim_{x\to-\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$ واعط جدول تغيرات g_n .

ج)احسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{g_n(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

د) احسب $\lim_{x\to+\infty}(g_n(x)-x-1)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

ه) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g_n(x)=0$.

و)مثل مبيانيا الدالة g_1 في م م م

2) أ) بين أن : $(\forall n\ge 1)\ (\exists! x_n>0)\quad g_n(x_n)=1$

ب)ادرس إشارة $g_{n+1}(x)-g_n(x)$

ج)استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تناقصية

د)بين أن $(\forall n\geq 1)\ \ x_n=e^{-nx_n}$

ه)استنتج نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$

B -نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي : $y_1=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*; y_{n+1}=e^{-y_n}$

1) بين أن x_1 هو الحل الوحيد للمعادلة $e^{-x}=x$ وأن $\frac{1}{e}\leq x_1\leq 1$

2) أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\frac{1}{e}\leq y_n\leq 1$

ب) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ |y_{n+1}-x_1|\leq e^{-\frac{1}{e}}\,|y_n-x_1|$

ج) استنتج أن $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها .

C-لتكن F الدالة العددية المعرفة $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $F(0)=\frac{1}{2}$ و $\forall x>0\ ;\ F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{g_1(t)}\,dt$

1) أ) بين أن : $\forall t>0\ ;\ \frac{1}{1+t}\leq\frac{1}{g_1(t)}\leq\frac{1}{t}$

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

2) أ) بين أن : $(\forall t>0)\qquad 1-t\leq e^{-t}\leq 1-t+\frac{t^2}{2}$

ب) استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 .

ج) ادرس اشتقاق الدالة F على اليمين في 0 .

3) أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب $F'(x)$ من أجل $x>0$

ب) ادرس تغيرات F على $\mathbb{R}^+$.

ج) مثل مبيانيا الدالة F.

تمرين 35 (الثانية علوم رياضية)

I - لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$ و (C) المنحنى الممثل للدالة f في م م م

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول النتائج مبيانيا .

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $f'(x)$ واعط جدول تغيرات f .

ج)- احسب $f''(x)$ وبين أن المعادلة $f''(x)=0$ تقبل حلين 1 و β حيث : $-\frac{1}{5}<\beta<0$

د) استنتج نقط انعطاف المنحنى (C) ثم ارسم المنحنى (C) .

2)أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+^*$. ليكن g التقابل العكسي للدالة f

ب) بين أن g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ، اعط منحى تغيراتها واحسب $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

ج) بين أن : $g\left(\frac{1}{n}\right)=\alpha_n\ ;\ (\exists!\alpha_n<0)\ (\forall n\geq 1)$

د) احسب α_1 وحدد منحى تغيرات المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$

ه) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ ليست مصغورة ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$

3) لكل عنصر x من $\mathbb{R}$ نضع : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، احسب $F'(x)$ واستنتج منحى تغيرات F على $\mathbb{R}$.

ب) تحقق أن : $(\forall t\leq 0)\,;\,0\leq f(t)\leq e^t$ واستنتج أن : $(\forall x\leq 0)\,;\,-1\leq F(x)\leq 0$

ج) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall x\geq 0)\,;\,F(x)=f(x)-1+2I(x)$

حيث : $I(x)=\int_0^x \dfrac{te^t}{(1+t^2)^2}dt$

د) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$

ه) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\,\int_{\frac{1}{n}}^1 g(t)\,dt+\dfrac{\alpha_n}{n}=F(\alpha_n)$ ثم استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;\,-1\leq\int_{\frac{1}{n}}^1 g(t)\,dt\leq 0$:

تمرين 36 (الثانية علوم رياضية)

في المستوى العقدي P المنسوب إلى م. م. م $(O,\vec{i},\vec{j})$ كل نقطة M لحقها $z\neq 0$ نربطها بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z'=-\dfrac{1}{\overline{z}}$

1– بين أن النقط M',M,O مستقيمية

2– بين أن : $\overline{z'+1}=\dfrac{1}{z}(z-1)$

3 – لتكن A و B نقطتين لحقهما على التوالي1 و-1 , و(C) الدائرة التي مركزها A و تمر من النقطة O

نفترض أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة (C) وتخالف النقطة O

أ) بين أن $|z-1|=1$ و أن $|z'+1|=|z'|$ ثم أول هندسيا هذه النتيجة

ب)استنتج طريقة هندسية لإنشاء M' انطلاقا من النقطة M

4 – لتكن M نقطة من المستوى لحقها $z\neq 0$ و M_1 مماثلتها بالنسبة للمحور الحقيقي (محور الأفاصيل)

أ) احسب $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ بدلالة z

ب) احسب عمدة $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ بدلالة قياس الزاوية $(\overrightarrow{M_1A};\overrightarrow{M_1B})$

ج) قارن قياسا الزاويتين $(\overrightarrow{M_1A};\overrightarrow{M_1B})$ و $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$

د) بين أن M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث AMB .

تمرين 37 (الثانية علوم رياضية)

1- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(\mathrm{E}):\mathrm{z}^3-(4+\mathrm{i})\mathrm{z}^2+(13+4\mathrm{i})\mathrm{z}-13\mathrm{i}=0$

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 .

ب)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2- في المستوى العقدي(P) المنسوب إلى م.م.م.م$(\mathrm{O},\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})$. نعتبر النقطA وB وC التي ألحاقها على التوالي i و 2+3i و 2-3i.

أ)ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$.حدد لحق النقطة A′صورة Aبالدوران r .

ب)بين أن النقطA′ و B و C مستقيمية .

ج)حدد الصيغة العقدية للتحاكي h الذي مركزه B و يحول النقطة C إلى النقطة A’.

د)تحقق أن : $h^{-1} \circ r(A) = C$ ثم حدد الصيغة العقدية للتطبيق $h^{-1} \circ r$.

تمرين 38 (الثانية علوم رياضية)

ليكن z عدد عقدي غير منعدم بحيث: $z = a + ib = [\rho, \theta]$

1)انطلاقا من الشكل أسفله بين أن : $\theta \equiv 2\arctan(\frac{b}{a+\rho}) \quad [2\pi]$

2)استنتج أن: $\tan(\frac{\pi}{12}) = 2 - \sqrt{3}$ (يمكنك اعتبار العدد $z = \sqrt{3} + i$)