

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 1 :

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 2) - 1$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2$$

$$f(x) = \ln\sqrt{x-1} - 3$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x} - 4$$

الحل :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x + 2 > 0 \quad -1$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

إذن $x^2 - x + 2 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

ومنه : $D_f = \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0 \quad -2$$

لنحل المترابحة باستخدام الجدول:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	—	—	○	+
$x+1$	—	○	+	+
$\frac{x+1}{x}$	+	○	—	+

وبما أن $\frac{x+1}{x} > 0$ في الجالين $]-\infty, -1[$ و $]0, +\infty[$: إذن $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x-1} > 0 \text{ و } x-1 \geq 0 \quad -3$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \neq 0 \text{ و } x-1 \geq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ و } x \geq 1$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 1$$

إذن : $D_f =]1, +\infty[$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } 1 - \ln x \neq 0 \quad -4$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } \ln x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x \neq e$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$$

$$D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[\text{ : إذن}$$

تمرين رقم 2 :

بسط ما يلي :

$$A = 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2 \ln 10 - \ln \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{\ln(\sqrt{5}+1) + \ln(\sqrt{5}-1)}{2}$$

الحل :

$$\begin{aligned} A &= 3(\ln 3 + \ln 5) - \ln 27 - 2\ln 10 - \ln \frac{1}{4} \\ &= 3\ln 3 + 3\ln 5 - \ln 3^3 - 2(\ln 2 + \ln 5) + \ln 4 \\ &= 3\ln 3 + 3\ln 5 - 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2\ln 5 + \ln 2^2 \\ &= 3\ln 3 + 3\ln 5 - 3\ln 3 - 2\ln 2 - 2\ln 5 + 2\ln 2 \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\ln(\sqrt{5}+1) + \ln(\sqrt{5}-1)}{2} \\ &= \frac{\ln[(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)]}{2} = \frac{\ln[\sqrt{5}^2 - 1^2]}{2} = \frac{\ln[5-1]}{2} = \frac{\ln 4}{2} = \frac{2\ln 2}{2} = \ln 2 \end{aligned}$$

تمرين رقم 3 :

حل في \mathbb{R} المعادلات و المترجمات التالية :

$$\ln(x^2 + 3) = \ln(2x) \quad -1$$

$$\ln x - 5\sqrt{\ln x} + 4 = 0 \quad -2$$

$$2(\ln x)^2 - \ln x - 3 \leq 0 \quad -3$$

الحل :

1- لنحل المعادلة $\ln(x^2 + 3) = \ln(2x)$ في \mathbb{R} :

$$\ln(x^2 + 4) = \ln(4x) \Leftrightarrow x^2 + 4 > 0 \text{ و } 4x > 0 \text{ و } x^2 + 4 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 > 0 \text{ و } x > 0 \text{ و } x^2 - 4x + 4 = 0$$

$(x = -2 \text{ أو } x = 2)$ و $x > 0 \Leftrightarrow x = 2$ لأن $x^2 + 4 > 0$ و حل المعادلة $x^2 - 4x + 4 = 0$ هما العددين 2 و -2 لأن $x = 2 \Leftrightarrow -2$ عدد سالب

ومنه فإن $S = \{2\}$

2- لنحل المعادلة $\ln x - 5\sqrt{\ln x} + 4 = 0$ في \mathbb{R} :

نضع $t = \sqrt{\ln x}$ ومنه المعادلة تصبح على الشكل : $t^2 - 5t + 4 = 0$

نحل المعادلة $t^2 - 5t + 4 = 0$.

$\Delta = 25 - 16 = 9$ ومنه المعادلة تقبل حلين هما : 1 و 4 .

و بالتالي : $t_1 = 1$ و $t_2 = 4$ إذن : $\sqrt{\ln x_1} = 1$ و $\sqrt{\ln x_2} = 4$

ومنه : $\ln x_1 = 1$ و $\ln x_2 = 16$ و بالتالي : $x_1 = e$ و $x_2 = e^{16}$

$$S = \{e, e^{16}\}$$

3- لنحل المترجمة $2(\ln x)^2 - \ln x - 3 \leq 0$ في \mathbb{R} :

نضع $t = \ln x$ ومنه المترجمة تصبح على الشكل : $2t^2 - t - 3 \leq 0$

نحل المعادلة : $2t^2 - t - 3 = 0$.

$\Delta = 1 + 24 = 25$ ومنه المعادلة تقبل حلين هما : -1 و $\frac{3}{2}$

ومنه $2t^2 - t - 3 \leq 0$ إذا كان $-1 \leq t \leq \frac{3}{2}$

و بالتالي $2(\ln x)^2 - \ln x - 3 \leq 0$ إذا كان $-1 \leq \ln x \leq \frac{3}{2}$ يعني $e^{-1} \leq x \leq e^{\frac{3}{2}}$

$$S = \left[e^{-1}, e^{\frac{3}{2}} \right]$$

تمرين رقم 4 :

حدد النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln x}{x} - 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x \ln x - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln x - 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x-2} \right) - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \left(\frac{x+1}{x-2} \right) - 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} - 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{x} - 11$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} - 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 - \ln x - 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 - 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x - 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sqrt[3]{x} - 18$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x - \ln x - 17$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3 + 1} - 16$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \times \frac{1}{x} = -\infty - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0 - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \times \frac{1}{x} = +\infty - 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x-2} = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \left(\frac{x+1}{x-2} \right) = -\infty - 7$$

$$\ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x-2} \right) = 0 - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty - 9$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = 0 - 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times (\ln x - 1) = -\infty - 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times x \ln x = 1 \times 0 = 0 - 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}^2 \left(\ln(\sqrt{x}^2) \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}^2 \left(2 \ln(\sqrt{x}) \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4\sqrt{x}^2 \left(\ln(\sqrt{x}) \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \left(\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) \right)^2 = 0 - 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 - \ln x = +\infty - 15$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} = 0 \times 0 = 0 - 16$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 - \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x^2 - 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty - 17$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} x \ln x = 0 - 18$$

تمرين رقم 4 :

حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية :

$f(x) = \sqrt{2 \ln x - 1} - 3$	$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 2$	$f(x) = \ln(x-1) - \ln x - 1$
$f(x) = \sqrt[3]{\ln x} - 6$	$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - 5$	$f(x) = \ln(\sqrt{1-2x}) - 4$

الحل :

1 - الدالة f عبارة عن مجموع دالتين و بالتالي : $(f+g)' = f' + g'$

$$f'(x) = (\ln(x-1))' - (\ln x)' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

2 - الدالة f عبارة عن خارج دالتين و بالتالي : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)' = \frac{(\ln(x+1))' \times \ln x - (\ln x)' \times \ln(x+1)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1} \times \ln x - \frac{1}{x} \times \ln(x+1)}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)}}{(\ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$$

3 - الدالة f عبارة عن مركب لدالتين و بالتالي : $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

$$f'(x) = \frac{(2 \ln x - 1)'}{2\sqrt{2 \ln x - 1}} = \frac{2 \times \frac{1}{x}}{2\sqrt{2 \ln x - 1}} = \frac{2}{2x\sqrt{2 \ln x - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{2 \ln x - 1}}$$

4 - الدالة f عبارة عن مركب لدالتين و بالتالي : $(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$

$$f'(x) = (\ln(\sqrt{1-2x}))' = \frac{(\sqrt{1-2x})'}{\sqrt{1-2x}} = \frac{(1-2x)'}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{1-2x}$$

5 - الدالة f عبارة عن مركب لدالتين و بالتالي : $(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}$$

6 - الدالة f عبارة عن مركب لدالتين و بالتالي : $((f)^n)' = n f' (f)^{n-1}$

$$f'(x) = (\sqrt[3]{\ln x})' = \left((\ln x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \times (\ln x)' \times (\ln x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{(\ln x)^{-\frac{2}{3}}}{3x} = \frac{1}{3x^3 \sqrt[3]{(\ln x)^2}}$$

تمرين رقم 2 (دراسة دالة)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty, 0[$ بما يلي : $g(x) = x+1+\ln(-x)$.

1 - أحسب الدالة المشتقة للدالة g ونهايات g عند محددات المجال $]-\infty, 0[$ ثم ضع جدول تغييرات الدالة g .

2 - استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} & x \geq 0 \\ x^2 + 2x \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

1 - أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - بين أن الدالة f متصلة في 0 .

ج - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و يسار 0 .

2 - أحسب الدالة المشتقة للدالة f لكل $x \in \mathbb{R}^*$ ثم اعط جدول تغييرات الدالة f .

3 - ليكن (Cf) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

أ - بين أن (Cf) يقبل نقطة انعطاف أفصولها سالب .

ب - ادرس الفروع اللانهائية .

ج - أنشئ (Cf) .

الحل :

الجزء الأول :

1 - الدالة g معرفة على الشكل : $g(x) = x+1+\ln(-x)$ في المجال $]-\infty, 0[$.

$$g'(x) = (x+1+\ln(-x))' = 1 + (\ln(-x))' = 1 + \frac{-1}{-x} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \quad ***$$

*** إشارة $g'(x)$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

*** نحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1+\ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t+1+\ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(-1 + \frac{1}{t} + \frac{\ln(t)}{t} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x+1+\ln(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -t+1+\ln(t) = -\infty$$

*** جدول تغييرات الدالة g

x	$-\infty$	-1	0
g'	+	○	-
g	$-\infty$	0	$-\infty$

2 - ** بما أن الدالة g تزايدية على المجال $]-\infty, -1]$ فإنه إذا كان $x \leq -1$ فإن $g(x) \leq g(-1)$ ومنه $g(x) \leq 0$.

بما أن الدالة g تناقصية على المجال $]-1, 0[$ فإنه إذا كان $x \geq -1$ فإن $g(x) \leq g(-1)$ ومنه $g(x) \leq 0$.

و بالتالي $g(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$.

1 - الدالة f معرفة على الشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} & x \geq 0 \\ x^2 + 2x \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

في \mathbb{R} .

أ - لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = 1 \quad **$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 2t \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(1 - 2 \frac{\ln(t)}{t}\right) = +\infty \quad **$$

ب - لنبين أن الدالة f متصلة في 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - 2t \ln(t) = 0 = f(0) \quad **$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} = 0 = f(0) \quad **$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ إذن f متصلة في 0.

ج - لندرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و يسار 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2(x+1)}} = +\infty \quad **$$

بما ان $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي باتجاه الأعلى معادلته $x = 0$ في النقطة O .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 \ln(-x) = -\infty \quad **$$

بما ان $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي باتجاه الأعلى معادلته $x = 0$ في النقطة O .

2 - ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = (x^2 + 2x \ln(-x))' = 2x + 2 \left(\ln(-x) + x \times \frac{1}{-x} \right) = 2x + 2 + 2 \ln(-x) \quad \text{فإن } x < 0 \text{ إذا كان } **$$

$$f'(x) = 2x + 2 + 2 \ln(-x) = 2(x + 1 + \ln(-x)) = 2g(x) \quad \text{ومنه}$$

و بما أن $g(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$ حسب السؤال 2 فإن $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0[$.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} \right)' = \left(\left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\frac{1}{3}-1} \times \left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2} \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{x}{x+1} \right)^{-\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) \quad \text{فإن } x > 0 \text{ إذا كان } **$$

ومنه فإن $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in]0, +\infty[$.

** جدول تغييرات الدالة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		-	+
f	$+\infty$	0	1

3 - أ - لنبين أن (Cf) يقبل نقطة انعطاف أفصولها سالب .

ليكن $x \in]-\infty, 0[$.

$$f''(x) = (x^2 + 2x \ln(-x))'' = (2x + 2 + 2 \ln(-x))' = 2 + 2 \times \frac{1}{x} = 2 + \frac{2}{x} = \frac{2x+2}{x}$$

$$f''(-1) = 0 \text{ لدينا } \text{ و } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

إذن (Cf) يقبل نقطة انعطاف $A(-1, 0)$.

ب - لندرس الفروع اللانهائية :

*** لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ إذن (Cf) يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y = 1$.

*** لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. لنحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x \ln(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \ln(-x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t + 2 \ln(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(-1 + 2 \frac{\ln(t)}{t} \right) = -\infty$$

ومنه (Cf) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$.

ج - إنشاء (Cf) .



