Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 1 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{x}}-x & (x<0) \\ f(0)=0 \\ f(x)=x^3\ln x-\frac{x^2}{2} & (x>0) \end{cases}$$

و ليكن (Cf) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 – بين أن f متصلة في الصفر.

2 – أدرس اشتقاق f في الصفر .
إعط التأويل الهندسي لهذه النتيجة .

3 – أدرس نهايات f عند محدات مجال تعريفها.

4 – أدرس تغييرات f .

5 – أ – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (Cf) .
ب – حدد وضع (Cf) بالنسبة للمستقيم المقارب .

6 – أنشئ (Cf) علما أنه يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما مختلفا الاشارة .

الحل :

1– لنبين أن f متصلة في الصفر (الطريقة نبين $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ و $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$).

** $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^3\ln x-\frac{x^2}{2}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2\times x\ln x-\frac{x^2}{2}=0=f(0)$ (لأن $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$)

** $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}-x=0=f(0)$ (لأن $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$).

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$ فإن الدالة f متصلة في الصفر.

2 – لندرس اشتقاق f في الصفر : (لنحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ و $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$)

** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3\ln x-\frac{x^2}{2}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x-\frac{x}{2}=0$

** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}-1=\lim\limits_{t\to-\infty}te^t-1=-1$

بوضع $t=\frac{1}{x}$ تصبح على الشكل $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}-1$ و $\lim\limits_{t\to-\infty}te^t-1$ لدينا $\lim\limits_{t\to-\infty}te^t=0$.

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس أفقي معادلته $y=f(0)=0$

(لأن معادلة المماس ل (Cf) في الصفر هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$)

بما أن $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس معادلته $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

يعني $y=-1(x-0)+0$ أي $y=-x$

3 – لنحسب نهايات f عند محدات مجموعة التعريف .

** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\ln x-\frac{x^2}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(x\ln x-\frac{1}{2}\right)=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x-\frac{1}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} - x = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

4 ـ تغييرات الدالة f :

***ليكن $x \in \left]0,+\infty\right[$: $f(x) = x^3\ln x - \frac{x^2}{2}$

$$f'(x) = \left(x^3\ln x - \frac{x^2}{2}\right)' = \left(x^3\ln x\right)' - \left(\frac{x^2}{2}\right)'$$

$$= 3x^2\ln x + x^3 \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{2}$$

$$= 3x^2\ln x + x^2 - x$$

*** ليكن $x \in \left]-\infty,0\right[$: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - x\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' - 1 = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{-e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x^2}$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}$$

** إشارة $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

*** $f'(x) = 3x^2\ln x + x^2 - x$ في المجال $\left]0,+\infty\right[$.

نلاحظ أن $f'(1) = 3\ln 1 + 1^2 - 1 = 0$.

إذا كان $x \geq 1$ فإن $3\ln x \geq 0$ ومنه $3\ln x + 1 \geq 1$

و بالتالي $x^2(3\ln x + 1) \geq x^2$ ونعلم أن $x^2 \geq x$ لكل $x \geq 1$

إذن : $x^2(3\ln x + 1) \geq x$

ومنه : $x^2(3\ln x + 1) - x \geq 0$

بمعنى أن : $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in \left[1,+\infty\right[$

إذا كان $0 < x \leq 1$ فإن $3\ln x \leq 0$ ومنه $3\ln x + 1 \leq 1$

و بالتالي $x^2(3\ln x + 1) \leq x^2$ ونعلم أن $x^2 \leq x$ لكل $0 < x \leq 1$

إذن : $x^2(3\ln x + 1) \leq x$

ومنه : $x^2(3\ln x + 1) - x \leq 0$

بمعنى أن : $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in \left]0,1\right]$

*** $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}$ في المجال $\left]-\infty,0\right[$

لدينا $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2} < 0$ لكل $x \in \left]-\infty,0\right[$.

** نضع جدول تغييرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5 ـ أ ـ الفروع اللانهائية :

** لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3\ln x - \frac{x^2}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x - \frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x\ln x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

إذن : (Cf) يقبل فرعا شلجميا بإتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

** لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1 = -1$ (لأن : $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ إذن $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$)

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} - x + x = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

إذن : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته : $y = -x + 1$ بجوار $-\infty$.

ب ـ الوضع النسبي لـ (Cf) و المقارب المائل $y = -x + 1$.

* $f(x) - (-x+1) = e^{\frac{1}{x}} - x + x - 1 = e^{\frac{1}{x}} - 1$.

* بما أن $\frac{1}{x} \neq 0$ فإن $e^{\frac{1}{x}} \neq 1$ ومنه $e^{\frac{1}{x}} - 1 \neq 0$ إذن $f(x) - (-x+1) \neq 0$.

* بما أن : $x < 0$ فإن $\frac{1}{x} < 0$ ومنه $e^{\frac{1}{x}} < 1$ و بالتالي $e^{\frac{1}{x}} - 1 < 0$ ومنه $f(x) < (-x+1)$.

نستنتج أن (Cf) تحت المقارب المائل $y = -x + 1$.

6 ـ التمثيل المبياني