إنجاز الاستاذ : محسن الشرفي ثانوية المختار السوسي المعازيز
Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

1 ـ تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز لها بـ $\ln$ أو Log .

بمعنى : $f(x) = \ln(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ و $x > 0$ و $f(1) = 0$

مثال 1 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$

$x \in Df \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0$. لنحل المتراجحة $x^2 + x - 2 > 0$.

$\Delta = 1 - 4\times1\times(-2) = 9$ إذن المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$ تقبل حلين مختلفين هما : $x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ و $x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$.

ومنه فإن $x^2 + x - 2 > 0$ إذا كان $x > 1$ أو $x < -2$ و بالتالي $Df =]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$.

مثال 2 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

$x \in Df \Leftrightarrow x + 1 > 0$ و $x > 0$ و $\ln(x) \neq 0$

يعني $x \neq 1$ و $x > 0$ و $x > -1$ (تقاطع المجالين $]0,+\infty[$ و $]-1,+\infty[$)

إذن $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

و منه $Df =]0,1[\cup]1,+\infty[$

مثال 3 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

$x \in Df \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0$ و $x > 0$

يعني $x > 0$ و $\ln x \leq 1$ (تقاطع المجالين $]0,+\infty[$ و $]-1,+\infty[$)

يعني $x > 0$ و $x \leq e$

إذن $x \in]0,e]$

و منه $Df =]0,e]$

مثال 4 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x) = \ln|x^2 - 1|$.

$x \in Df \Leftrightarrow |x^2 - 1| > 0$

و بما أن $|x^2 - 1| \geq 0$ فإن $x \in Df \Leftrightarrow |x^2 - 1| \neq 0$

ومنه نحل المعادلة $|x^2 - 1| = 0$

$|x^2 - 1| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ أو $x = -1$

و منه $Df =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

2 ـ خاصيات :

خاصية 1 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا .

$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$ و $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ و $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$.

مثال 1 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\ln(x-2)=\ln(5-x)$.

$$\ln(x-2)=\ln(5-x) \Leftrightarrow x-2=5-x \text{ و } x-2>0 \text{ و } 5-x>0$$
$$\Leftrightarrow 2x=7 \text{ و } x>2 \text{ و } x<5$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2} \text{ و } 2<x<5$$

و بما أن $\frac{7}{2}\in\left]2,5\right[$ فإن $S=\left\{\frac{7}{2}\right\}$

مثال 2 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\ln(x-1)<\ln(2x)$.

$$\ln(x-1)<\ln(2x) \Leftrightarrow x-1<2x \text{ و } x-1>0 \text{ و } 2x>0$$
$$\Leftrightarrow -x<1 \text{ و } x>1 \text{ و } x>0$$
$$\Leftrightarrow x>-1 \text{ و } x>1 \text{ و } x>0$$

وتقاطع المجالات المحددة لدينا : $\left]-1,+\infty\right[\cap\left]1,+\infty\right[\cap\left]0,+\infty\right[=\left]1,+\infty\right[$

إذن : $S=\left]1,+\infty\right[$

خاصية 2 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

$$\ln(x\times y)=\ln x+\ln y$$
$$\ln(\frac{1}{x})=-\ln x$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$$
$$\ln\left(x^r\right)=r\ln x$$

أمثلة :

لنكتب بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$ الأعداد التالية :

— $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. لدينا $\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 2-\ln 3$

— $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$. $\ln\left(\frac{8}{3}\right)=\ln 8-\ln 3=\ln\left(2^3\right)-\ln 3=3\ln 2-\ln 3$

— $\ln\left(\frac{4}{81}\right)$. $\ln\left(\frac{4}{81}\right)=\ln 4-\ln 81=\ln\left(2^2\right)-\ln\left(3^4\right)=2\ln 2-4\ln 3$

— $\ln(216)$. $\ln(216)=\ln\left(2^3\times 3^3\right)=\ln\left(2^3\right)+\ln\left(3^3\right)=3\ln 2+3\ln 3$

— $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)$. $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)-\ln\left(\sqrt{3}\right)=\ln\left(2^{\frac{1}{3}}\right)-\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$

— بسط A بحيث : $A=\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$$A=\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}=\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)=\ln\left(\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)=\ln\left(\sqrt{4-2}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

3 – النهايات :

خاصية :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \text{ و } \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$$
$$\text{و } \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \text{ و } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

أمثلة :

ـ لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\ln x}$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}1+\ln x=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}=0$

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}1+\ln x=-\infty$ ومنه $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\ln x}=0$

ـ لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+x$ و $\lim_{x\to0^+}\ln(x)+x$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+x=+\infty$.

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}\ln(x)+x=-\infty$.

ـ لنحسب : $\lim_{x\to0^+}\ln(x)-x$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x$.

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}\ln(x)-x=-\infty$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

<u>الطريقة استعمال النهاية</u> $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)$

و بما ان $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$.

ـ لنحسب : $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$.

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}1-\ln(x)=+\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

<u>الطريقة هي التعميل ب</u> $\ln x$. و بالتالي $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}$

و بما أن $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln(x)}=0$ و منه $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}1-\ln(x)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1-\ln x}$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

<u>الطريقة هي التعميل ب</u> $\ln x$. و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}=0$ و منه $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$.

ـ لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}=0\times\frac{1}{+\infty}=0\times0=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^2}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty\times+\infty=-\infty$$

ـ لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{(-\infty)^2}{0^+}=+\infty\times+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$$

و بما ان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

4 ـ المشتقة اللوغاريتمية :

خاصية :

u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال .

لكل عدد x من I لدينا : $\left(\ln|u(x)|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

أمثلة :

$$\left(\ln|2x+1|\right)'=\frac{(2x+1)'}{2x+1}=\frac{2}{2x+1}$$

$$\left(\ln|-x^2+4x|\right)'=\frac{(-x^2+4x)'}{(-x^2+4x)}=\frac{-2x+4}{-x^2+4x}$$

$$\left(\ln\sqrt{x}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$$

تعريف :

u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال .

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u **على المجال** I .

أمثلة :

لنحدد الدالة المشتقة للدالة التالية : $\ln(x+\sqrt{x})$: $\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)$

$$\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)'=\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{x+\sqrt{x}}=\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}=\frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x+\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)}$$

التمثيل المبياني للدالة $\ln x$