Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

I ـ الدالة الأصلية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I إذا كانت F قابلة للإشتقاق على I و كان $F'(x)=f(x)$ لكل $x\in I$.

أمثلة :

** الدالة $F(x)=3x-2$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=3$ على $\mathbb{R}$: لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$

** الدالة $F(x)=e^{2x}-x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=2e^{2x}-1$ على $\mathbb{R}$ لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$

** الدالة $F(x)=\ln x-x^2+4x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=\frac{1}{x}-2x+4$ على $\mathbb{R}$ لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$

جدول الدوال الأصلية الإعتيادية

الدالة f	الدوال الأصلية F
0	λ
a	$ax+\lambda$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}+\lambda$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}+\lambda$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+\lambda$
e^x	$e^x+\lambda$
$\cos x$	$\sin x+\lambda$
$\sin x$	$-\cos x+\lambda$

خاصيات :

خاصية 1 : لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I .

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال $F+\lambda$ بحيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

أمثلة :

* الدالة $F(x)=x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=3x^2$ على $\mathbb{R}$: لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال التي تكتب على الشكل : $F(x)+\lambda$ أي $x^3+\lambda$.

* الدالة $F(x)=e^x-x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=e^x-3x^2$ على $\mathbb{R}$: لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال التي تكتب على الشكل : $F(x)+\lambda$ أي $e^x-x^3+\lambda$.

* الدالة $F(x)=\frac{1}{x}-\cos x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=\frac{-1}{x^2}+\sin x$ على $\mathbb{R}$: لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$

إذن الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال التي تكتب على الشكل : $F(x)+\lambda$ أي $F(x)=\frac{1}{x}-\cos x+\lambda$.

خاصية 2 : لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I .

ليكن x_0 عنصرا من I و y_0 عنصرا من $\mathbb{R}$, توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I بحيث $F(x_0)=y_0$

أمثلة :

* لنحدد F الدالة الأصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $f(x)=-3x^2+2x-1$ بحيث $F(1)=-3$.

الدوال الأصلية F للدالة $f(x)=-3x^2+2x-1$ على $\mathbb{R}$ هي : $F(x)=-x^3+x^2-x+\lambda$ لأن $\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=f(x)$

و بما أن $F(1)=-3$ فإن $-1+1-1+\lambda=3$ ومنه $\lambda=-2$ وبالتالي $F(x)=-x^3+x^2-x-2$.

* لنحدد F الدالة الأصلية على $\mathbb{R}^*$ للدالة $f(x)=\dfrac{2}{x}-x+4$ بحيث $F(-1)=0$.

الدوال الأصلية F للدالة $f(x)=\dfrac{2}{x}-x+4$ على $\mathbb{R}^*$ هي : $F(x)=2\ln|x|-\dfrac{x^2}{2}+4x+\lambda$ لأن $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad F'(x)=f(x)$

و بما أن $F(-1)=0$ فإن $2\ln|-1|-\dfrac{(-1)^2}{2}+4(-1)+\lambda=0$ ومنه $\lambda=\dfrac{9}{4}$ وبالتالي $F(x)=2\ln|x|-\dfrac{x^2}{2}+4x+\dfrac{9}{4}$.

II – تكامل دالة متصلة على مجال :

تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I .

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ بحيث F دالة أصلية للدالة f على I يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و يكتب $\int_a^b f(x)dx$

و يقرأ تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

أمثلة :

* لنحسب التكامل : $\int_1^9 \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\int_1^9\left(\sqrt{x}\right)'dx=\left[\sqrt{x}\right]_1^9=\sqrt{9}-\sqrt{1}=3-1=2$$

* لنحسب التكامل : $\int_{-1}^1 \dfrac{1}{x^4}dx$

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x^4}dx=\int_{-1}^1 x^{-4}dx=\left[\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}\right]_{-1}^1=\left[\frac{1}{-3}x^{-3}\right]_{-1}^1=\left[\frac{1}{-3x^3}\right]_{-1}^1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{-2}{3}$$

* لنحسب التكامل : $\int_1^3\dfrac{1}{x+1}dx$

$$\int_1^3\frac{1}{x+1}dx=\int_1^3\frac{1}{x+1}dx=\left[\ln|x+1|\right]_1^3=(\ln 4-\ln 2)=(2\ln 2-\ln 2)=\ln 2$$

خاصيات

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و a و b و c عناصر من I و λ عدد حقيقي لدينا :

1 – $\int_a^a f(x)dx=0$ و $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2 – $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

3 – $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$

4 – $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

أمثلة :

* لنحسب التكامل : $\int_0^\pi 4\sin x dx$ (خاصية 3)

$$\int_0^\pi 4\sin xdx=4\int_0^\pi\sin xdx=4\left[-\cos x\right]_0^\pi=4(-\cos\pi+\cos 0)=4(1+1)=8$$

* لنحسب التكامل : $\int_1^3 \frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}dx$ (خاصية 4)

$$\int_1^3 \frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}dx=\int_1^3 \frac{-1}{x^2}dx+\int_1^3 \frac{1}{x}dx=\left[\frac{1}{x}\right]_1^3+\left[\ln|x|\right]_1^3=\frac{1}{3}-1+\ln 3-\ln 1=\frac{-2}{3}+\ln 3$$

* لنحسب التكامل : $\int_0^4 |x-2|dx$ (خاصية 2)

$$\int_0^4 |x-2|dx=\int_0^2 |x-2|\,dx+\int_2^4 |x-2|dx=\int_0^2 (-x+2)\,dx+\int_2^4 (x-2)dx$$

$$=\left[\frac{-x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^4=\left(\frac{-4}{2}+4\right)+\left(\frac{16}{2}-8-\frac{4}{2}+4\right)=4$$

III – المكاملة بالأجزاء :

خاصية

لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق على $[a,b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a,b]$.

لدينا :
$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

أمثلة :

* * لنحسب التكامل : $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

نضع : $f'(x)=\sin x \rightarrow f(x)=-\cos x$

$g(x)=x \rightarrow g'(x)=1$

ومنه :
$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\int_0^{\pi} f'(x)g(x)\,dx=\left[f(x)g(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)g'(x)\,dx$$

$$=\left[-x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x\,dx=\left[-x\sin x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\left[-x\sin x\right]_0^{\pi}+\left[\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$=-\pi\sin\pi+0\sin 0+\sin\pi-\sin 0=0$$

* * لنحسب التكامل : $\int_0^1 (4-x)e^x dx$

نضع : $f'(x)=e^x \rightarrow f(x)=e^x$

$g(x)=4-x \rightarrow g'(x)=-1$

ومنه :
$$\int_0^1 (4-x)e^x dx=\int_0^1 f'(x)g(x)\,dx=\left[f(x)g(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx$$

$$=\left[(4-x)e^x\right]_0^1-\int_0^1 -e^x dx=\left[(4-x)e^x\right]_0^1+\int_0^1 e^x dx=\left[(4-x)e^x\right]_0^1+\left[e^x\right]_0^1$$

$$=2e^2-4+e-1=2e^2+e-5$$

* * لنحسب التكامل : $\int_{-1}^3 x\sqrt{3-x}\,dx$

نضع : $f'(x)=\sqrt{3-x}=(3-x)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f(x)=-\frac{(3-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3}$

$g(x)=x \rightarrow g'(x)=1$

ومنه :

$$\int_{-1}^{3} x\sqrt{3-x}dx=\int_{-1}^{3} f'(x)g(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_{-1}^{3}-\int_{-1}^{3} f(x)g'(x)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3}x\right]_{-1}^{3}-\int_{-1}^{3}-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}dx=\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3}x\right]_{-1}^{3}+\frac{2}{3}\int_{-1}^{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{(3-3)^3}\times 3+-\frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3}\times(-1)+\frac{2}{3}\left[-\frac{(3-x)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_{-1}^{3}$$

$$=\frac{2}{3}\times 8+\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{5}(3-x)^{\frac{2}{5}}\right]_{-1}^{3}=\frac{16}{3}-\frac{4}{15}\left[(3-3)^{\frac{2}{5}}-(3+1)^{\frac{2}{5}}\right]$$

$$=\frac{16}{3}+\frac{4\sqrt[5]{16}}{15}$$

IV – التكامل و الترتيب :

خاصيات

لتكن f و g دالتين متصلتين على قطعة $[a,b]$

** إذا كان $a\le b$ و $f\ge 0$ على $[a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

** إذا كان $a\le b$ و $f\le 0$ على $[a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\le 0$

** إذا كان $a\le b$ و $f\le g$ على $[a,b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

** العدد الحقيقي $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a,b]$.

أمثلة :

** الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ متصلة و موجبة على المجال $[1,e]$ إذن : $\int_1^e \frac{1}{x}dx\ge 0$

** الدالة $f(x)=-x^2$ متصلة و سالبة على المجال $[0,4]$ إذن : $\int_0^4 -x^2dx\le 0$

** لدينا : $\frac{x^2}{2}\le\frac{x^2}{1+x}\le x^2$ لكل $0\le x\le 1$ إذن : $\int_0^1\frac{x^2}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\le\int_0^1 x^2dx$ و بما أن : $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ و $\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{6}$

إذن : $\frac{1}{6}\le\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx\le\frac{1}{3}$