Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

1 – تعريف :

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري تسمى الدالة الأسية النبيرية و يرمز لها بالرمز : exp.

بمعنى : $y=\exp(x)\Leftrightarrow x=\ln(y)$ لكل $y\in\left]0,+\infty\right[$ و $x\in\mathbb{R}$.

نتائج :

— بما أن $\ln(1)=0$ فإن $\exp(0)=1$ و نرمز $e^0=1$.

— بما أن $\ln(e)=1$ فإن $\exp(1)=e$ و نرمز $e^1=e$.

— $\exp(x)>0$ لكل $x\in\mathbb{R}$ و نكتب $e^x>0$.

— $\ln(e^x)=x$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

— $e^{\ln(x)}=x$ لكل $x\in\left]0,+\infty\right[$

2 – خاصيات :

خاصية 1 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان.

$e^x<e^y\Leftrightarrow x<y$ و $e^x=e^y\Leftrightarrow x=y$ و $e^x>e^y\Leftrightarrow x>y$.

مثال :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $e^{x-1}=e$

$$e^{x-1}=e\Leftrightarrow e^{x-1}=e^1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=1+1=2$$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $e^{x^2-x}=1$

$$e^{x^2-x}=1\Leftrightarrow e^{x^2-x}=e^0\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x=1$$

إذن $S=\{0,1\}$.

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية : $e^{x^2}\le e^{2-x}$

$$e^{x^2}\le e^{2-x}\Leftrightarrow x^2\le 2-x\Leftrightarrow x^2+x-2\le 0$$

نحل المتراجحة $x^2+x-2\le 0$ و نحصل على $S=[-2,1]$

خاصية 2 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان .

$$e^{x+y}=e^x\times e^y \quad \text{و} \quad e^{-x}=\frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx}=\left(e^x\right)^n$$

مثال :

بسط : $e^{2\ln3}\times e^{3\ln2}$ و $e\times\frac{\left(e^3\right)^{-2}}{e^{-\ln2}}$ و $e^{\ln4+2\ln e}$.

$$e^{2\ln3}\times e^{3\ln2}=e^{\ln\left(3^2\right)}\times e^{\ln\left(2^3\right)}=e^{\ln9}\times e^{\ln8}=9\times8=72$$

$$e\times\frac{\left(e^3\right)^{-2}}{e^{-\ln2}}=e\times\frac{e^{-6}}{e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}}=e\times\frac{e^{-6}}{\frac{1}{2}}=2\times e\times e^{-6}=2e^{-5}$$

$$e^{\ln4+2\ln e}=e^{\ln4}\times e^{2\ln e}=4\times e^{\ln\left(e^2\right)}=4e^2$$

3 – النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 .$$

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^x - 1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}\times\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-2}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-e^x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x\left(e^x-1\right)}{x} = \lim_{x\to0} e^x\times\frac{e^x-1}{x} = 1$$

4 ـ مشتقة الدالة الأسية النبيرية :

— $\left(e^x\right)' = e^x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

— لتكن $u(x)$ قابلة للاشتقاق على مجال I .

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$$

مثال :

لنحدد الدوال المشتقة للدوال التالية :

$e^{2x}+x$ و $e^{\frac{1}{1-x}}$ و $\ln\left(e^x-1\right)$ و $\left(x^2-2x\right)e^x$ و $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\left(e^{2x}+x\right)' = \left(e^{2x}\right)'+1 = 2e^{2x}+1$$

$$\left(e^{\frac{1}{1-x}}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'\times e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{+1}{(1-x)^2}\times e^{\frac{1}{1-x}}$$

$$\left(\ln\left(e^x-1\right)\right)' = \frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1\right)} = \frac{e^x}{e^x-1}$$

$$\left(\left(x^2-2x\right)e^x\right)' = \left(x^2-2x\right)'\times e^x + \left(e^x\right)'\left(x^2-2x\right) = (2x-2)e^x + e^x\left(x^2-2x\right) = 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x = \left(x^2-2\right)e^x$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{\left(e^{2x}-1\right)'\left(e^{2x}+1\right)-\left(e^{2x}+1\right)'\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$